

平成 24 年度 情報工学コース卒業研究報告要旨

石井克哉 研究室	氏 名	山 本 祐 輝
卒業研究題目	定数項の異なる三重対角係数行列を持つ連立一次方程式の並列解法の比較	
<p>ポアソン方程式などの楕円型偏微分方程式は様々な物理現象の支配方程式として現れる重要な式の 1 つであり、数値的に解を得る数値シミュレーションでは大規模な連立一次方程式を解く問題に帰着する。その連立一次方程式の係数行列は疎行列であるが、行列サイズが巨大であるため、連立一次方程式を解くには膨大な計算時間が必要になる。そのため、ガウス・ザイデル法、ヤコビ法、ADI 法などの反復解法が一般的に用いられている。その中でも ADI 法は他の反復法に比べ、反復回数が少なくすむことと、必ず真の解に近づいていくことから最もよく用いられている。ADI 法は x 方向、y 方向を交互に定数とみなし繰り返し解く手法であり、これは、係数行列が一定な三重対角行列を繰り返し解く問題 ($Ax^k = f^k \quad k = 1, 2, 3, \dots$) になる。この繰り返し解く反復部分が計算時間の主要な部分を占める。それゆえ、その三重対角行列を高速に解くことは非常に重要であり、過去の研究において様々な並列解法が提案されている。</p> <p>本研究では並列解放として Cyclic Reduction + LU 分解法 (2012 Yusuke Kondo) と Parallel Dichotomy 法 (2010 Andrew V. Terekhov) と Parallel Dichotomy 法の基となっている三重対角行列に対するガウス消去並列法を選び、それぞれの計算時間、通信時間、それらの和の Total 時間を比較検証した。</p> <p>並列解法には大きく分けて準備ステップと計算ステップの 2 つのステップが存在する。準備ステップでは、定数項に依存しない計算を係数行列 A について行う。係数行列 A は一定なため準備ステップは一度計算を行えば繰り返し解くことが可能であり、計算時間にあまり影響を与えない。次の計算ステップでは定数項 f^k が与えられ、x^k を繰り返し求める。このステップが計算時間の主要部分になる。各並列解法の流れを簡潔に説明する。まず、Cyclic Reduction + LU 法では、LU 分解をした後に解の依存間隔を広げるリダクション操作し、境界値の解を求めて各プロセスで残りの要素を独立に L と U を解く。三重対角行列に対する並列ガウス消去法は各プロセスで仮の解を求め、プロセス間で和を計算することで境界の値を求め、各プロセスで残りの要素を Thomas 法を用いて解く。Parallel Dichotomy 法は三重対角行列の性質を利用し、二分法的に三重対角行列に対する並列ガウス消去法に基づき境界値の解を得て、各プロセスで残りの要素を Thomas 法を用いて解く。</p> <p>比較検証は C 言語、並列計算ライブラリとして MPI を使用し、分散メモリ型の名古屋大学スーパーコンピュータ富士通 HX600 を用いた。また、プロセス数は 2 ~ 512、係数行列のサイズは 2^{10} と 2^{16}、反復回数 (k) は 10 万回で行った。検証した結果、全ての手法はプロセス数が増えると徐々に通信時間が多くかかり、プロセス数が 32 ~ 64 から徐々に Total 計算時間が増えていった。三重対角行列に対するガウス消去法では、行列サイズ 2^{16} のとき、プロセス数が 128 以上になると逐次解法より時間がかかった。また独立計算部分は Cyclic Reduction + LU 法は各プロセスで LU 分解された形を解くのに対し、Parallel Dichotomy 法は各プロセスで Thomas 法を基にして解くため、独立計算部分の計算時間が多くかかった。そこで、Parallel Dichotomy 法の独立計算部分だけ LU 分解を行うように改良し、Parallel Dichotomy 法と Parallel Dichotomy に LU 分解を加えた方法を比較した。LU 分解を加えた方法では元の Parallel Dichotomy 法より高速に求解できた。</p>		