平成18年度 情報工学コース卒業研究報告要旨

高木 研究室	氏　　名	長 瀬 哲 也
卒業研究題目	乗算の繰り返しによる冪根計算アルゴリズム	

信号処理やコンピュータグラフィクス等において、平方根や立方根などの冪根計算が出現する。このような計算を実行するために、これまでに様々なアルゴリズムが提案されてきた。

このうち、多項式近似法及び Newton 法に基づく反復法が広く知られている。多項式近似法は、関数を多項式により近似し、その多項式を評価することにより冪根を求める手法である。多項式近似法には、入力の全範囲を1つの多項式で近似する方法と、入力の範囲をいくつかの区間に分け、それぞれの区間を多項式で近似する方法がある。Newton 法に基づく反復法は、漸化式1回の計算により近似解の誤差が2乗に比例して小さくなる2次収束のアルゴリズムである。冪根計算に対してそのまま Newton 法を適用すると漸化式計算に除算が必要となるため、この除算を避けるために冪根の逆数を Newton 法により計算するという手法が取られる。

平方根計算に対しては、Newton 法とは別の反復法アルゴリズムとして、積和演算の繰り返しによる平方根計算アルゴリズムが提案されている。このアルゴリズムでは、入力 X に対して $\sqrt{X}$ を直接求めるのではなく、$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{X}}{K}$ の値を積和演算の繰り返しにより求めている。ここで、K は $2\sqrt{X}$ の近似値である。$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{X}}{K}$ の値が十分な精度で求められれば、1回の積和演算により $\sqrt{X}$ を計算できる。このアルゴリズムは解の収束は1次収束であるが、漸化式の計算に必要な乗算回数が1回であるため、高速に計算することができる。

このような冪根計算を専用回路で実現する際に、精度、計算時間、テーブルサイズなどの要求に応じて、適切なアルゴリズムを選択する必要がある。本研究ではまず、先に述べた積和演算の繰り返しによる平方根計算アルゴリズムを一般の次数について冪根計算を行うアルゴリズムに拡張する。この拡張アルゴリズム、Taylor 展開による多項式近似法及び、Newton 法に基づく反復法について比較を行った。これらのアルゴリズムを比較するために、十分な精度の冪根を求めるまでに必要な乗算回数及び、初期近似値などを保持するためのテーブルサイズを評価した。

比較の結果、以下のことが明らかとなった。Taylor 展開による多項式近似法は、テーブルサイズが大きくなるが、他のアルゴリズムに比べて少ない乗算回数で計算が行える。一方、Newton 法に基づく反復法では解が2次の収束をするため、乗算回数の増加率に対するテーブルサイズの減少率が他のアルゴリズムよりも大きい。積和演算の繰り返しによる平方根計算アルゴリズム及びその拡張アルゴリズムは、他の2つのアルゴリズムの中間の性質を持つ。また、反復法のアルゴリズムでは、1回の漸化式計算に冪根の次数に比例した乗算回数が必要となるため、全体の乗算回数が多くなる。従って高次の冪根計算においては多項式近似法が有利であると考えられる。